Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет

Методичні вказівки та завдання до самостійного вивчення теми *“Аналітична геометрія у просторі”*

Дніпропетровськ
2005

Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет

Методичні вказівки та завдання до самостійного вивчення теми *“Аналітична геометрія у просторі”*

ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМІВ “ГІРНИЦТВО” ТА “ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА”

Дніпропетровськ
НГУ
2005

Методичні вказівки та завдання до самостійного вивчення теми “Аналітична геометрія у просторі” / Уклад.: З.І. Бондаренко, С.М. Подольська, С.Є. Тимченко, Д.В. Удовіцька. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2005. – 37 с.

Укладачі: З.І. Бондаренко, ст. викладач
С.М. Подольська, асистент
С.Є. Тимченко, канд. техн. наук, доцент
Д.В. Удовіцька, асистент.

Відповідальна за випуск завідувачка кафедлри вищої математики Л.В. Новікова, д-р техн. наук, проф.

Укладачі:
Бондаренко Зоя Іванівна
Подольська Світлана Миколаївна
Тимченко Світлана Євгенівна
Удовіцька Діна Володимирівна

Методичні вказівки та завдання
до самостійного вивчення теми
“Аналітична геометрія у просторі”

для студентів напрямів “Гірництво” та “Інженерна механіка”

Редакційно-видавничий комплекс
Редактор Л.О. Чуїщева

Підписано до друку 04.06.05 Формат 30 х 42/4.
Папір Captain. Ризографія. Умовн. друк. арк. 1,9
Обліково-видавн. арк. 1,9. Тираж 100 прим. зам. №

НГУ
49027, м. Дніпропетровськ, просп. К.Маркса, 19

ПЕРЕДМОВА

Запропоновані методичні вказівки призначаються для самостійного вивчення студентами будь - якої спеціальності трьох тем з аналітичної геометрії в просторі: "Площина", "Пряма в просторі" та "Пряма та площина". У цьому методичному посібнику подається весь теоретичний матеріал із вказаних тем: визначення, вивід формул та рівнянь. Тому він може використовуватись як конспект лекцій при підготовці до іспиту. З усіх тем наведено багато прикладів, розглянуто розв'язки типових задач. Приведені задачі для самостійного розв'язування з вказівками.

1. ПЛОЩИНА

1.1. Рівняння поверхні

Рівняння F(x, y) = 0 взагалі визначає деяку лінію на площині, тобто множину всіх точок на площині **Oxy**, координати яких **x** та **y** задовольняють цьому рівнянню. Подібно цьому рівняння

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

взагалі задає в просторі **Oxyz** деяку поверхню, тобто множину всіх точок, координати яких x, y, z задовольняють це рівняння. Рівняння (1) називають рівнянням цієї поверхні, а x, y, z – її змінними координатами.

Однак іноді поверхня задається не рівнянням, а як множина точок з тими чи іншими властивостями. У цьому випадку треба знайти рівняння поверхні виходячи з її геометричних властивостей.

Приклад. Знайти рівняння кульової поверхні (сфери) з радіусом R і з центром в точці $O_1(x_1, y_1, z_1)$.

Розв'язання. Згідно з визначенням сфери відстань між будь-якою її точкою $M\ (x, y,z)$ і центром $O_1(x_1, y_1, z_1)$ дорівнює радіусу R , тобто $O_1M = R.$, але $O_1M = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$. Тому $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} = R$ або

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 = R^2. \tag{2}$$

Ми одержали рівняня сфери, бо йому задовольняють координати точок, які знаходяться на цій сфері. Зокрема, якщо центр сфери співпадає з початком координат, то рівняння сфери (2) матиме такий виглядҐ: $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

Відповідь. $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 = R^2$.

1.2. Нормальний вектор площини. Рівняння площини, що проходить через задану точку

Розглянемо в просторі площину Q. Її знаходження повністю визначиться заданням вектора $\overline{N}$, перпендикулярного до цієї площини, та деякої' фіксованої точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ що знаходиться в площині Q.

Вектор $\overline{N}$, перпендикулярний до площини Q, називається нормальним вектором цієї площини.

Якщо позначити буквами A, B, C проекції нормального вектора $\overline{N}$, то

$$\overline{N} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}. \tag{3}$$

Виведемо рівняння площини Q, яка проходить через задану точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і має даний нормальний вектор (3). Для цього розглянемо вектор $\overline{M_1M}$, який з'єднує точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ з будь-якою точкою $M(x, y, z)$ в площині Q (рис. 1).

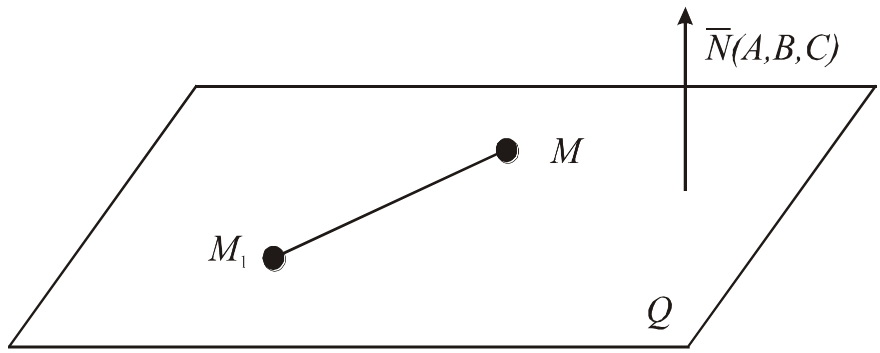

Рис.1

Де б не знаходилася точка M на площині Q, вектор $\overline{M_1M}$ перпендикулярний вектору $\overline{N}$ на площині Q. Тому скалярний добуток $\overline{M_1M} \cdot \overline{N} = 0$. Запишемо скалярний добуток через проекції:

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{N} = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1),$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{4}$$

Ми засвідчилили, що координати будь-якої точки $M(x, y, z)$ на площині Q задовольняють рівнянню (4). Ясно, що координати тих точок, що не належать площині Q, цьому рівнянню не задовольняють (в цьому випадку $\overline{M_1M} \cdot \overline{N} \neq 0$). Отже, ми отримали шукане рівняння площини Q.

Рівняння (4) називається рівнянням площини, що проходить через задану точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}$ і є першого ступеня відносно змінних координат x, y, z.

Таким чином, бачимо, що будь-якій площині відповідає рівняння першого ступеня відносно змінних координат.

Приклад 1. Написати рівняння площини, яка проходить через точку M (1, –2, 3) перпендикулярно вектору $\overline{N} = 2\overline{i} + 4\overline{k}$.

Розв'язання. Згідно з (3) $A = 2, B = 0, C = 4$. Із формули (4) виходить $2(x - 1) + 0(y + 2) + 4(z - 3) = 0$, або $x + 2z - 7 = 0$.

Відповідь. $x + 2z - 7 = 0$.

Надаючи коефіцієнтам A, B та C у рівнянні (4) різні значення, ми можемо отримати рівняння будь-якої площини, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Сукупність площин, які проходять через дану точку, називається **в'язкою площин**. Рівняння (4), в якому коефіцієнти A, B та C можуть приймати будь - яке значення, називається **рівнянням в'язки площин**.

Приклад 2. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1,-1,0),\ M_2(2,1,-3),\ M_3(-1,0,1)$ (рис. 2).

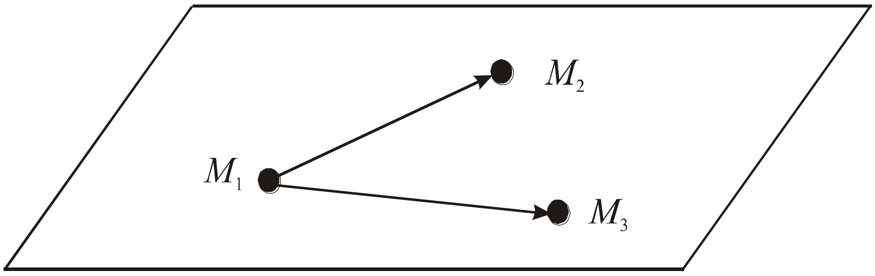

Рис.2

Розв'язання. Скористаемося рівняннем площини, яка проходить через точку (x_1, y_1, z_1) перпендикулярно нормальному вектору $\overline{N}\ (A, B, C)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

За нормальний вектор $\overline{N}$ приймемо

$$\overline{N} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 5\bar{i} + 5\bar{j} + 5\bar{k}$. Тоді $\overline{N}\ (5, 5, 5)$ і рівняння шуканої площини має вигляд:

$$5(x-1) + 5(y+1) + 5z = 0; \quad x + y + z = 0.$$

Відповідь. $x + y + z = 0$.

Завдання до самостійної роботи

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2,1,-1)$ і має нормальний вектор $\vec{N} = \{1,-2,3\}$.

Відповідь. $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

2. Точка $M_0(2,-1,-1)$ - основа перпендикуляра, який опущений з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

Відповідь. $2x - y - z - 6 = 0$.

3. Дано дві точки $M_1(3,-1,2)$ та $M_2(4,-2,-1)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Відповідь. $x - y - 3z + 2 = 0$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1,1,1)$ паралельно векторам $\overline{a_1}(0,1,2)$, $\overline{a_2}(-1,0,1)$.

Відповідь. $x - 2y + z = 0$.

5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1,2,0)$ та $M_2(2,1,1)$ паралельно вектору $\overline{a}(3,0,1)$.

Відповідь. $x - 2y - 3z + 3 = 0$.

1.3. Загальне рівняння площини

У рівнянні площини (4), яка проходить через дану точку, розкриємо дужки та приведемо його до вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{5}$$

де $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$.

Рівняння (5) називається **загальним рівнянням площини**. Це рівняння площини з нормальним вектором $\overline{N}\ (A, B, C)$, тобто, коефіцієнти при змінних $x,\ y,\ z$ – це проекції нормального вектора цієї площини відповідно на осі Ox, Oy, Oz.

Рівняння (5) зручне для дослідження площини, яку воно описує.

Розглянемо випадки.

1. У рівнянні (5) відсутній вільний член ($D = 0$) і воно має вигляд

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Ясно, що площина проходить через початок координат, оскільки координати початку $O(\ 0,0,0\ )$ задовольняють цьому рівнянню.

2. У рівнянні відсутня змінна x, тобто $A = 0$, і воно має вигляд

$$By + Cz + D = 0.$$

Це рівняння площини з нормальним вектором $\overline{N}\ (0, B, C)$, проекція якого на вісь Ox дорівнює 0. Це означає, що вектор $\overline{N}\ (0, B, C)$ перпендикулярний до осі Ox, а площина – паралельна осі Ox.

Аналогічно рівняння $Ax + Cz + D = 0$ (B = 0, відсутня змінна y) задає площину, паралельну осі Oy, а рівняння $Ax + By + D = 0$ (C = 0, відсутня змінна z) – площину, паралельнуосі Oz.

3. У рівнянні площини (5) $A = 0$, $D = 0$. Рівняння $By + Cz = 0$ задає площину, яка паралельна осі Ox ($A = 0$) та проходить через початок координат, тобто вона включає в себе вісь Ox.

Аналогічно $Ax + Cz = 0$ ($B = 0$, $D = 0$) – рівняння площини, якій належить вісь Oy, а $Ax + By = 0$ ($C = 0$, $D = 0$) – рівняння площини, на якій знаходиться вісь Oz.

4. У рівнянні площини (5) $A = 0$, $B = 0$ та $D = 0$. Рівняння має вигляд $Cz = 0$, $z = 0$.

Це рівняння площини, яка паралельна осям Ox та Oy (бо $A = 0$ та $B = 0$), тобто паралельна площині Oxy. І ця площина включає в себе точку $O(0, 0, 0)$, отже це - сама координатна площина Oxy. Таким чином, рівняння координатної площини Oxy: $z = 0$. Аналогічно: Oxz $y = 0$; Oyz $x = 0$ (рис. 3).

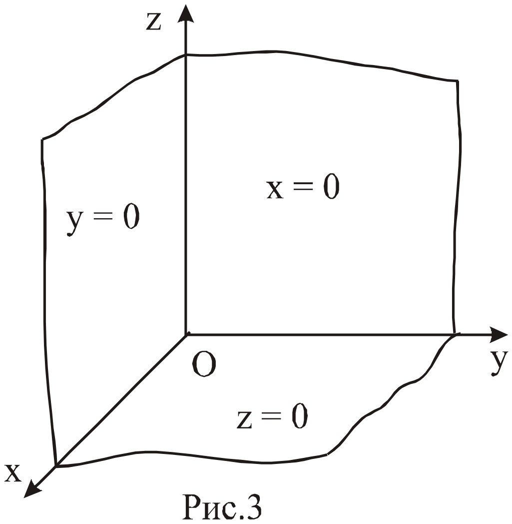

Рис.3

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2, -1, 3)$ та $M_2(3, 1, 2)$ паралельно вектору $\bar{a}(3, -1, 4)$.

Розв'язання. Скористаемося рівняннем площини, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно нормальному вектору $\overline{N}\ (A, B, C)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

За нормальний вектор $\overline{N}$ приймемо

$$\overline{N} = \bar{a} \times \overline{M_1 M_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -7\bar{i} + 7\bar{j} + 7\bar{k}.$$

Отже, $\overline{N}\ (-7, 7, 7)$ і рівняння шуканої площини має вигляд $-7(x-2) + 7(y+1) + 7(z-3) = 0, \quad -x + y + z = 0.$

Відповідь. $-x + y + z = 0.$

Приклад 2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M (3,-5,4) паралельно площини Oxy.

Розв’язання. Оскільки площина паралельна площині Oxy, то в загальному рівнянні площини коефіцієнти A та B дорівнюють 0, тобто $Cz + D = 0$, $z + \dfrac{D}{C} = 0$ або $z + m = 0$, де $m = \dfrac{D}{C}$.

Якщо площина проходить через точку M $(3,–5,4)$, то координати точки задовольняють рівнянню площини. $z + m = 0$, $4 + m = 0$, $m = – 4$. Рівняння шуканої площини $z – 4 = 0$.

Відповідь. $z – 4 = 0$.

Приклад 3. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь Oz і точку M $(2,– 3, –2)$.

Розв’язання. Рівняння шуканої площини має вигляд: $Ax + By = 0$, але точка M $(2,–3,–2)$ належить площині, тому $2A – 3B = 0$, $A = \dfrac{3B}{2}$. Тоді

$$\frac{3B}{2}x + By = 0, \quad \frac{3}{2}x + y = 0, \quad 3x + 2y = 0.$$

Відповідь. $3x + 2y = 0$.

Завдання до самостійної роботи

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M $(–5,2,–1)$ паралельно площині Oyz.

Відповідь. $x + 5 = 0$.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь Ox і точку M $(4,–1,2)$.

Відповідь. $2y + z = 0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(7,2,–3)$ і $M_2(5,6,–4)$ паралельно осі Ox.

Відповідь. $y + 4z + 10 = 0$.

1.4. Побудова площини за її рівнянням

Знаючи рівняння площини, легко побудувати саму площину. Для цього досить знайти три будь-які її точки, які б не знаходилися на одній прямій. Щоб знайти яку-небудь точку на площині $Ax + By + Cz + D = 0$, досить задати довільне значення двох її координат, а третю знайти з рівняння площини. Зручніше всього знаходити точки перетину площини осями координат.

Приклад 1. Побудувати площину $2x + 3y + 6z – 6 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину площини осями координат. Для того, щоб знайти точку перетину площини віссю Ox, треба в рівнянні площини прийняти $y = 0$ та $z = 0$ (так як $y = z = 0$ для будь-якої точки осі Ox).

Отже, $x = 3$. Маємо точку $A(3, 0, 0)$. Аналогічно, прийнявши $x = 0$ та $y = 0$, знаходимо аплікату точки перетину площини віссю Oz: $6z - 6 = 0$, звідки $z = 1$. Маємо точку $B(0, 0, 1)$. Нарешті, при $x = z = 0$ знаходимо $y = 2$. Маємо точку $C(0, 2, 0)$. Отже, дана площина $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ проходить через точки $A(3, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$, $C(0, 2, 0)$ (рис. 4).

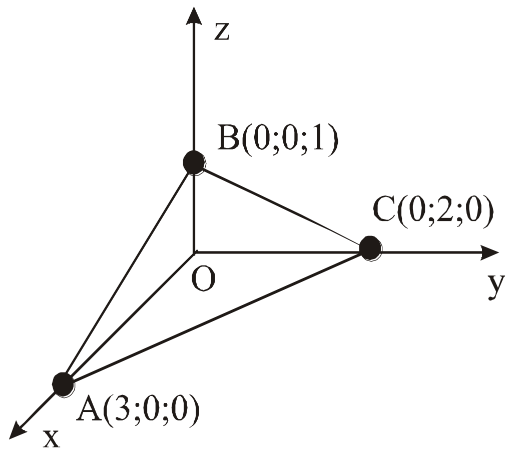

Рис.4

Приклад 2. Побудувати площину $2x + 5y - 10 = 0$.

Розв'язання. Нормальний вектор $\overline{N}(2, 5, 0)$ перпендикулярний до осі Oz, тому шукана площина паралельна цій осі. Для побудови площини досить знайти точки перетину її осями Ox та Oy.

Нехай $x = 0$, отже, $y = 2$. Маємо точку $A\ (0, 2, 0)$. Нехай $y = 0$, отже, $x = 5$. Маємо точку $B\ (5, 0, 0)$. Площина проходить через точки $A\ (0, 2, 0)$, $B\ (5, 0, 0)$, паралельно осі Oz (рис.5).

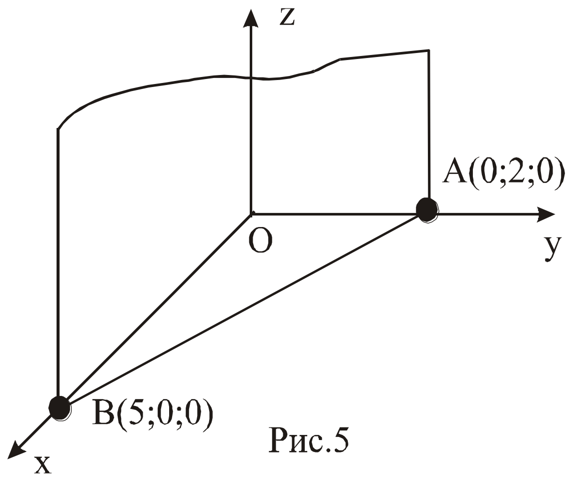

Рис.5

1.5. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Розглянемо дві площини Q_1 та Q_2, які задані відповідно рівняннями $Q_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $Q_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Кутом між двома площинами будемо вважати один із двогранних кутів між цими площинами (рис. 6).

Кут φ між нормальними векторами $\overline{N_1}$ та $\overline{N_2}$ площин Q_1 та Q_2 дорівнює одному із вказаних суміжних двогранних кутів.

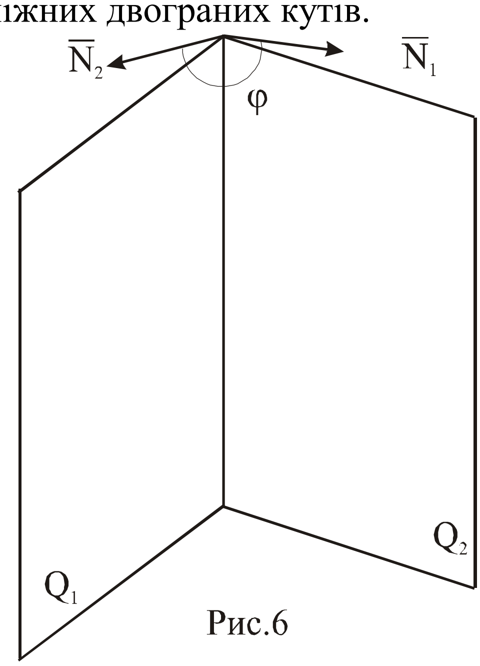

Рис.6

Тому $\cos\varphi = \dfrac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right|\cdot\left|\overline{N_2}\right|}$. $\overline{N_1} = A_1\bar{i} + B_1\bar{j} + C_1\bar{k}$, $\overline{N_2} = A_2\bar{i} + B_2\bar{j} + C_2\bar{k}$.

або
$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (6)$$

Приклад 1. Знайти кут між площинами $x + 2y - 3z = 0$ та $2x + 3y + z = 0$.

Розв'язання. $\overline{N_1} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$, $\overline{N_2} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$. Із формули (6) маємо
$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + (-3)\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}.$$

Відповідь. $\cos\varphi == \dfrac{5}{14}$.

Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Дві площини Q_1 та Q_2:

а) паралельні тоді і тільки тоді, коли їх нормальні вектори колінеарні, тобто $\overline{N_1} \parallel \overline{N_2}$;

б) перпендикулярні одна до одної тоді і тільки тоді, коли їх нормальні вектори перпендикулярні, тобто $\overline{N_1}\cdot\overline{N_2} = 0$.

Приклад 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(-2, 1, 4)$ паралельно площині $3x + 2y - 7z + 8 = 0$.

Розв'язання. Сористаемося рівняннем площини, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно нормальному вектору $\overline{N}\,(A, B, C)$, $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$. У ролі нормального вектора $\overline{N}$ візьмемо нормальний вектор площини $3x + 2y - 7z + 8 = 0$. Тоді $\overline{N}\,(3, 2, -7)$. Рівняння шуканої площини має вигляд $3(x+2)+2(y-1)-7(z-4)=0$, або $3x+2y-7z+32=0$.

Відповідь. $3x+2y-7z+32=0$.

Приклад 3. Через точку $M_1(-2, 3, 6)$ провести площину, перпендикулярну до площин $2x + 3y - 2z - 4 = 0$ та $3x + 5y + z = 0$ (рис. 7).

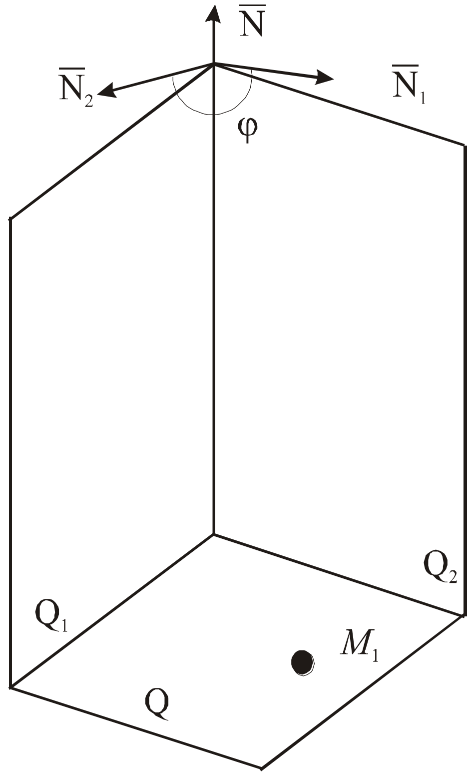

Рис.7

Розв'язання. Скористаємося рівнянням площини, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно нормальному вектору $\overline{N}\,(A, B, C)$, $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$. Нормальний вектор площини $2x + 3y - 2z - 4 = 0$ має вигляд $\overline{N_1}\,(2, 3, -2)$, а нормальний вектор площини $3x + 5y + z = 0$ – $\overline{N_2}\,(3, 5, 1)$.

За нормальний вектор $\overline{N}$ шуканої площини приймемо

$$\overline{N} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 13\bar{i} - 8\bar{j} + \bar{k}.$$

Тоді $\overline{N}\,(13,-8,1)$. Рівняння шуканої площини має вигляд:
$13(x+2)-8(y-3)+(z-6)=0$ або $13x-8y+z+44=0$.

Відповідь. $13x-8y+z+44=0$.

Завдання до самостійної роботи

1. Обчислити кут між площинами $x+\sqrt{2}y+z+1=0$ та $x+\sqrt{2}y-z+3=0$.

Відповідь. $\varphi=\pi/3$.

2. Встановити, які з наведених площин паралельні і які перпендикулярні:

a) $3x+y-5z-12=0$, $2x+6y-3=0$,

b) $5x+2y-3z-5=0$, $10x+4y-6z+5=0$,

c) $3x-y+2z+15=0$, $5x+9y-3z-1=0$.

Відповідь. b) паралельні, c) перпендикулярні.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин $x+2y+3z+5=0$ та $x-5z-1=0$.

Відповідь. $5x-4y+z=0$.

1.6. Точка перетину трьох площин

Нехай дано три площини: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$; $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$; $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$. Щоб знайти точку перетину цих площин, треба, очевидно, розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0. \end{cases}$

Якщо визначник (детермінант) цієї системи $\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0$, то система має тільки один розв'язок, тобто три площини перетинаються в одній точці.

Приклад. Знайти точку перетину площин $x+y-2z+3=0$, $2x-2y+3z-7=0$, $x+3y-z-4=0$.

Розв'язання. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} x+y-2z+3=0, \\ 2x-2y+3z-7=0, \\ x+3y-z-4=0, \end{cases}$

знайдемо координати точки перетину площин $x=1$, $y=2$, $z=3$.

Відповідь. $x=1$, $y=2$, $z=3$.

1.7. Відстань між точкою та площиною

Нехай дано точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ та площину $Q: Ax+By+Cz+D=0$.

Знайдемо відстань d між ними.

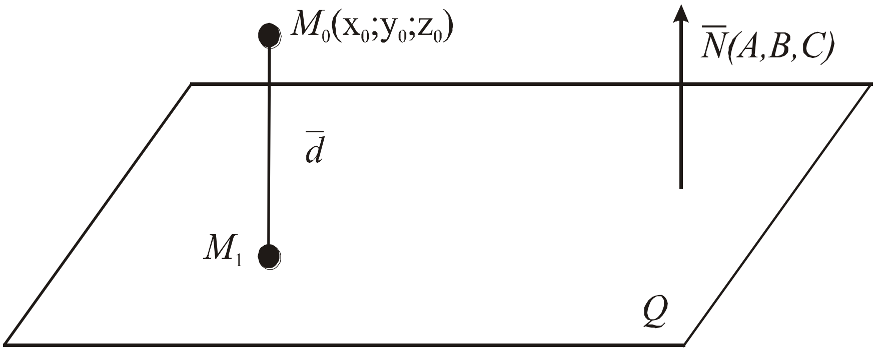

Рис.8

Відстань d - це довжина відрізока M_1M_0 перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину (рис. 8). Уведемо вектор $\overline{d} = \overline{M_1M_0} = = (x_0 - x_1)\overline{i} + (y_0 - y_1)\overline{j} + (z_0 - z_1)\overline{k}.$ Запишемо скалярний добуток векторів $\overline{d}$ та $\overline{N} = A \cdot \overline{i} + B \cdot \overline{j} + C \cdot \overline{k}$ $\overline{d} \cdot \overline{N} = |\overline{d}| \cdot |\overline{N}| \cdot \cos(\overline{d}, \overline{N}).$ Так як вектори $\overline{d}$ та $\overline{N}$ колінеарні, то кут між ними або дорівнює 0°, або 180°, а косинус кута дорівнює 1 або – 1. Тому $\overline{d} \cdot \overline{N} = \pm |\overline{d}| \cdot |\overline{N}|$, звідки $|\overline{d}| = d = \left| \dfrac{\overline{d} \cdot \overline{N}}{|\overline{N}|} \right|$ або $d = \dfrac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Розкриємо у чисельнику дужки та відмітимо, що $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D,$ оскільки точка (x_1, y_1, z_1) знаходиться на площині $Ax + By + Cz + D = 0$. Одержимо

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{7}$$

Приклад 1. Знайти відстань від точки M_1 $(1, 0, –2)$ до площини $2x – y + 2z – 4 = 0.$

Розв'язання. Скористаємося формулою (7). У чисельнику цієї формули в рівняння площини замість змінних x_0, y_0, z_0 підставимо координати точки $M_1(1, 0, -2)$: $d = \dfrac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{6}{3} = 2.$

Відповідь. $d = 2.$

Приклад 2. Обчислити відстань d між паралельними площинами

$$3x - y + \frac{3}{2}z - 9 = 0, \quad -6x + 2y - 3z + 4 = 0.$$

Розв'язання. Візьмемо довільну точку на першій площині, наприклад, $M(0,0,6)$. Тоді шукана відстань d дорівнює відстані точки $M(0,0,6)$ до другої площини, тобто $d = \dfrac{|-18+4|}{\sqrt{36+4+9}} = \dfrac{14}{7} = 2.$

Відповідь. $d = 2$.

Приклад 3. На осі Oz знайти точку, яка рівновіддалена від двох площин $x-\sqrt{2}y-z+3=0, \quad 2x-2y+z+2=0.$

Розв'язання. Візьмемо довільну точку на осі Oz, наприклад $M(0,0,z_0)$. Тоді відстань від точки $M(0,0,z_0)$ до першої площини $d_1 = \dfrac{|-z_0+3|}{\sqrt{1+2+1}} = \dfrac{|-z_0+3|}{2}$, а відстань від точки $M(0,0,z_0)$ до другої площини $d_2 = \dfrac{|z_0+2|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{|z_0+2|}{3}$. Отже, $d_1 = d_2$, $\dfrac{|-z_0+3|}{2} = \dfrac{|z_0+2|}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{-z_0+3}{2} = \pm\dfrac{z_0+2}{3}$. Звідки $z_{01}=1, \quad z_{02}=13.$ Отже, $M_1(0,0,1), \quad M_2(0,0,13).$

Відповідь. $M_1(0,0,1), \quad M_2(0,0,13).$

Завдання до самостійної роботи

1. На осі Oy знайти точку, яка знаходиться від площини $x + 2y - 2z - 2 = 0$ на відстані $d = 4$.

Відповідь. (0, 7, 0) і (0, –5, 0).

2. Обчислити відстань d від точки $M\,(-1,1,-2)$ до площини, яка проходить через точки $N\,(1,-1,1)$, $K\,(-2,1,3)$, $P\,(4,-5,-2)$.

Відповідь. $d = 4$.

3. Обчислити відстань між паралельними площинами $x - 2y - 2z - 12 = 0$ та $x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Відповідь. $d = 2$.

2. ПРЯМА У ПРОСТОРІ

2.1. Рівняння лінії у просторі

Лінію у просторі ми будемо розглядати як множину всіх точок, які належать кожній з двох поверхонь, що перетинаються. Якщо ці поверхні задані рівняннями $F(x, y, z) = 0$ і $\Phi(x, y, z) = 0$, то лінія їх перетину визначиться системою рівнянь $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases}$ Наприклад, коло, що получається при перетині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ площиною $z = 3$, визначиться системою рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 3. \end{cases}$ Змінні координати будь-якої точки $M\ (x,\ y,\ z)$ вказаного кола задовольняють кожному з рівнянь цієї системи.

2.2. Загальні рівняння прямої

Розглянемо систему рівнянь першого степеня

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Кожне з рівнянь цієї системи є рівнянням площини. Якщо ці площини не паралельні (тобто їх нормальні вектори не колінеарні), то система (8) визначає пряму як лінію перетину двох площин, тобто як множину всіх точок простору, координати яких задовольняють кожному з рівнянь системи (8).

Рівняння (8) називають **загальним рівнянням прямої**.

Приклад 1. Побудувати пряму, задану загальним рівнянням $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - y + z + 5 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Для того щоб побудувати пряму, досить знайти дві її точки. Простіше за все вибрати точки перетину прямої з координатними площинами. Точка перетину прямої з координатними площинами називається **слідом** цієї **прямої**. Координати сліду M_1 даної прямої на площині Oxy одержимо з рівнянь прямої, покладаючи $z = 0$. Це дає $y = 4,\ x = -1$.

Отже, координати точки M_1 такі: $x = -1,\ y = 4,\ z = 0$. Аналогічно, покладаючи в рівняннях прямої $x = 0$, одержимо координати сліду M_1 прямої на площині Oyz: $M_2(0, 4, -1)$. Маючи точки M_1 та M_2, будуємо пряму, що проходить через них (рис. 9).

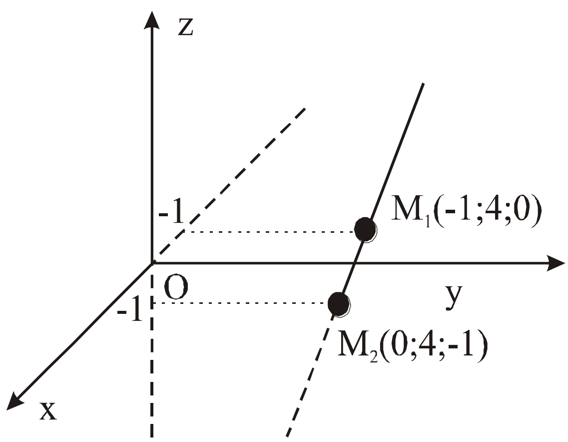

Рис.9

2.3. Канонічні рівняння прямої

Пряма визначиться однозначно, якщо задати точку, через яку вона повинна проходити, та вектор, паралельний даній прямій. Вектор $\overline{S}$, паралельний даній прямій, називається її **напрямним вектором**. Нехай задані точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та вектор $\overline{S} = m\overline{i} + n\overline{j} + p\overline{k}$ (рис. 10). Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ паралельно вектору $\overline{S} = m\overline{i} + n\overline{j} + p\overline{k}$.

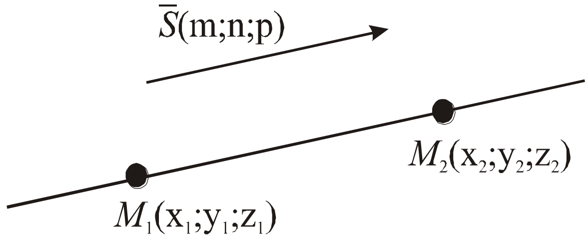

Рис.10

Візьмемо на прямій будь-яку точку $M\,(x, y, z)$ зі змінними координатами x, y, z. Побудуємо вектор $\overline{M_1M} = (x - x_1)\overline{i} + (y - y_1)\overline{j} + (z - z_1)\overline{k}$.

Вектор $\overline{M_1M}$ знаходиться на прямій, яка паралельна вектору $\overline{S}$, значить вектори $\overline{S}$ та $\overline{M_1M}$ колінеарні. Тому проекції векторів $\overline{S}$ та $\overline{M_1M}$ пропорціональні, тобто

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \tag{9}$$

Отже, координати будь-якої точки на прямій повинні задовольняти рівнянням (9), які називаються рівняннями прямої, що проходить через дану точку, або **канонічними рівняннями прямої**. Зокрема, коли напрямний вектор $\overline{S}$ одиничний, тобто $\overline{S} = \cos\alpha \cdot \overline{i} + \cos\beta \cdot \overline{j} + \cos\gamma \cdot \overline{k}$, рівняння (9) мають вигляд

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}. \tag{10}$$

Напрямними коефіцієнтами тут являються направляючі косинуси вектора $\overline{S}$.
Рівняння (9) рівносильні системі двох рівнянь першого степеня, наприклад:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n}, \\ \dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{p}. \end{cases} \tag{11}$$

Третє рівняння $\dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$ є наслідком цих двох рівнянь.

Розглянемо питання про те, як перейти від загальних рівнянь прямої L:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

до її канонічних рівнянь. Для цього треба знайти яку-небудь точку на прямій L. Координати точки M на прямій L одержимо з системи рівнянь (8), надаючи одній з координат довільне значення.

Так як пряма перпендикулярна нормальним векторам $\overline{N_1}(A_1, B_1, C_1)$ та $\overline{N_2}(A_2, B_2, C_2)$, то за напрямний вектор $\overline{S}$ прямої L можна прийняти векторний добуток $\overline{S} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

Приклад 1. Привести загальні рівняння прямої $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$ до канонічного виду.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої в канонічній формі

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Так як $\overline{N_1} = (2, 3, -1)$, $\overline{N_2} = (1, -3, 2)$, то

$$\overline{S} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$= 3\overline{i} - 5\overline{j} - 9\overline{k}$, а $m = 3, n = -5, p = -9$.

Точку M на прямій знайдемо, покладаючи в загальних рівняннях прямої L, наприклад, $z = 0$. Маємо $\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ x - 3y = 0. \end{cases}$ Розв'язуючи цю систему рівнянь, одержимо $x = 0$, $y = 0$. Отже, $M(0,\ 0,\ 0,)$. Таким чином, канонічні рівняння прямої мають вигляд $\frac{x}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{-9}$.

Відповідь. $\frac{x}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{-9}$.

Приклад 2. Звести до каноничного вигляду загальне рівняння прямої $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки пряма перпендикулярна до нормальних векторів $N_1(1,-2,3)$ і $N_2(3,2,-5)$, то за напрямний вектор $\overline{S}$ прямої можна прийняти векторний добуток $\overline{N_1}\times\overline{N_2}$, тобто $\overline{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -5\end{vmatrix}=4\bar{i}+14\bar{j}+8\bar{k}.$

Знайдемо точку M, яка належить прямій. Нехай $x = 0$, тоді $\begin{cases}-2y+3z-4=0;\\ 2y-5z-4=0,\end{cases}$

$z = -4$, $y = -8$. Тому, $M(0, -8, -4)$ належить прямій. Отже, канонічні рівняння прямої мають вигляд $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+8}{14}=\dfrac{z+4}{8}$.

Відповідь. $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+8}{14}=\dfrac{z+4}{8}$.

2.4 Параметричні рівняння прямої

У рівняннях (9) ми маємо рівність трьох відношень: $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$. При змінних x, y, z ці відношення теж змінні, але залишаються рівними. Можна записати $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}=t$ або

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{m}=t,\\[2mm] \dfrac{y-y_1}{n}=t,\\[2mm] \dfrac{z-z_1}{p}=t.\end{cases}\quad \text{Звідки маємо}\quad \begin{cases}x=mt+x_1,\\ y=nt+y_1,\\ z=pt+z_1.\end{cases}$$

Тут t – змінний параметр. Змінність його викликає змінність координат x, y, z і точка $M(x, y, z)$ зі змінними координатами переміщується по прямій; m, n, p – координати напрямного вектора $\overline{S}$ прямої; x_1, y_1, z_1 – координати однієї з точок на прямій.

2.5. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма L проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Складемо канонічне рівняння цієї прямої. Для цього знайдемо напрямний вектор $\overline{S}$ прямоїю, за якій візьмемо вектор $\overline{M_1M_2}$:

$$\bar{S} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

Отже, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$ із рівняння (9) маємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (12)$$

Рівняння (12) називаються **рівнянням прямої, що проходить через дві точки**.

Приклад 1. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1, 3, -5)$, $M_2(1, 4, 2)$.

Розв'язання Використовуючи рівняння (12), одержимо $\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-3}{4-3} = \frac{z+5}{2+5}$ або $\frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{7}$. Так як $m = 0$, то дана пряма перпкендикулярна до осі Ox і рівняння прямої можна записати як $x = 1$, $\frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{7}$.

Відповідь. $x = 1$, $\frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{7}$.

Приклад 2. Через точки $M_1(-6,6,-5)$ та $M_2(12,-6,1)$ проведена пряма. Знайти точки перетину цієї прямої з координатними площинами.

Розв'язання. Використовуючи рівняння (12), одержимо $\frac{x+6}{12+6} = \frac{y-6}{-6-6} = \frac{z+5}{1+5}$ або $\frac{x+6}{18} = \frac{y-6}{-12} = \frac{z+5}{6}$. Тоді точка перетину прямої з координатной площиною xOy $z = 0$. Маємо $\frac{x+6}{18} = \frac{y-6}{-12} = \frac{5}{6}$,

$$\begin{cases} x + 6 = 18 \cdot \frac{5}{6}, \\ y - 6 = -12 \cdot \frac{5}{6}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6 = 15, \\ y - 6 = -10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = -4. \end{cases}$$

Точкою перетину прямої з координатною площиною xOy є точка $A(9, -4, 0)$. Знайдемо точку перетину прямої з координатной площиною yOz. Це точка $x = 0$. Аналогічно

$$\begin{cases} \frac{6}{18} = \frac{y-6}{-12} = \frac{z+5}{6}, \\ \frac{1}{3} = \frac{y-6}{-12} = \frac{z+5}{6}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 6 = -12 \cdot \frac{1}{3}, \\ z + 5 = 6 \cdot \frac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 6 = -4, \\ z + 5 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \\ z = -3. \end{cases}$$

Точкою перетину прямої з координатною площиною yOz є точка $B(0,2,-3)$.

Знайдемо точку перетину прямої з координатной площиною xOz. Це $y = 0$;

$$\frac{x+6}{18}=\frac{-6}{-12}=\frac{z+5}{6}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x+6}{18}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{z+5}{6}=\dfrac{1}{2};\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+6=9,\\ z+5=3;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3,\\ z=-2.\end{cases}$$

Точкою перетину прямої з координатною площиною xOz є точка $C(3, 0, -2)$.

Відповідь. $A(9, -4, 0)$, $B(0, 2, -3)$, $C(3, 0, -2)$.

Завдання до самостійної роботи

1. Дані вершини трикутника $A(3,6, -7)$, $B(-5,2,3)$, $C(4, -7,-2)$. Скласти параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини C.

Відповідь. $x = -5t - 1,\ y = 11t + 4,\ z = -2$.

2. Маємо три вершини паралелограма $A(3,0,-1)$, $B(1,2,-4)$ і $C(0,7,2)$. Скласти рівняння сторін AD і CD.

Відповідь. AD: $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{6}$, CD: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$.

3. Знайти рівняння прямої, що проходить через початок координат та середину відрізка AB, якщо $A(4,0,2)$, $B(2,6, -4)$.

Відповідь. $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-1}$.

2.6. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

Нехай у просторі дано дві пересічні прямі:

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\quad L_2:\frac{x-x_1}{m_2}=\frac{y-y_1}{n_2}=\frac{z-z_1}{p_2}.$$

Як відомо, кутом між двома прямими вважають один із двох суміжних кутів, утворених прямими, які проведені паралельно даним через яку-небудь точку простору. Один з цих сміжних кутів дорівнює куту φ між напрямними векторами $\overline{S_1}$ та $\overline{S_2}$ даних прямих. Так як $\overline{S_1}(m_1, n_1, p_1)$, $\overline{S_2}(m_2, n_2, p_2)$, то за відомою формулою косинуса кута між векторами одержимо:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}}{\left|\overline{S_1}\right|\cdot\left|\overline{S_2}\right|},\ \text{або}\ \cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \quad (13)$$

Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих рівносильні відповідно умовам колінеарності та перпендикулярності їх напрямних векторів $\overline{S_1}$ та $\overline{S_2}$, тобто дві **прямі паралельні**, якщо їх **напрямні вектори** $\overline{S_1}$ та $\overline{S_2}$

колінеарні, дві **прямі перпендикулярні**, якщо їх **напрямні вектори** $\overline{S_1}$ та $\overline{S_2}$ **перпендікулярні**.

Приклад 1. Знайти кут між прямими $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-2}$, $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{5}$.

Розв'язання. З формули (13) одержимо

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot3+3\cdot2+(-2)\cdot5}{\sqrt{5^2+3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+5^2}}=\frac{11}{38}.$$

Відповідь. $\cos\varphi==\frac{11}{38}$.

Приклад 2. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,2,3)$ паралельно прямій $\begin{cases}2x+3y+5z=0,\\ 3x-4y+z=0.\end{cases}$

Розв'язання. Запишемо рівняння шуканої прямої в канонічній формі

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z-3}{p}.$$

Напрямний вектор $\overline{S}$ шуканої прямої одержимо як векторний добуток нормальних векторів $\overline{N_1}(2,3,5)$, $\overline{N_2}(3,-4,1)$.

$$\overline{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & -4 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ -4 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=$$

$23\bar{i}+13\bar{j}-17\bar{k}$. Отже, $\overline{S}(23,13,-17)$. Тоді $\frac{x-1}{23}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-3}{-17}$.

Відповідь. $\frac{x-1}{23}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-3}{-17}$.

Приклад 3. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-4,0,2)$ перпендикулярно прямим $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$, $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, що проходить через дану точку:

$$\frac{x+4}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-2}{p}.$$

За напрямний вектор $\overline{S}$ шуканої прямої можна прийняти будь-який вектор, перпендикулярний до напрямних векторів $\overline{S_1}(2,3,4)$, та $\overline{S_2}(3,2,2)$

даних прямих. Зокрема, вектор $\overline{S}$ можна покласти рівним векторному добутку векторів $\overline{S_1}(2, 3, 4)$ та $\overline{S_2}(3, 2, 2)$:

$$\overline{S} = \overline{S_1} \times \overline{S_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\overline{i} + 8\overline{j} - 5\overline{k}.$$

Звідси $\overline{S}(-2, 8, -5)$. Тоді $\dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-0}{8} = \dfrac{z-2}{-5}$.

Відповідь. $\dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z-2}{-5}$.

Приклад 4. Знайти кут між прямими $L_1 : \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+5}{0} = \dfrac{z-3}{1}$ та $L_2 : x = t - 1,\ y = -2t - 2, z = -2t$.

Розв'язок: Щоб застосувати формулу (13), необхідно параметричні рівняння другої прямої L_2 перевести в канонічні. Оскільки $t = x + 1 = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{-2}$, то канонічні рівняння другої прямої L_2 мають вигляд $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{-2}$. Тому за формулою (13) $\cos\theta = \dfrac{1\cdot(-1) + 0\cdot(-2) + 1\cdot(-2)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Шуканий кут дорівнює $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Відповідь. $\dfrac{3\pi}{4}$.

Приклад 5. Довести паралельність прямих:

$x = 2t + 5, y = -t + 2, z = t - 7$ і $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. За напрямний вектор другої прямої візьмемо $\overline{S_2} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$, де $\overline{N_1}(1,3,1)$, $\overline{N_2}(1,-1,-3)$. Тоді

$$\overline{S_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i} \cdot (-9 + 1) - \overline{j} \cdot (-3 - 1) + \overline{k} \cdot (-1 - 3) = -8 \cdot \overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}.$$

Маємо $\overline{S_2} = (-8,4,-4)$. Напрямним вектором першої прямої є $\overline{S_1} = (2,-1,1)$. Використовуючи умову колінеарності векторів, запишемо $\frac{-8}{2} = \frac{4}{-1} = \frac{-4}{1} = t$, де $t = -4$. Тоді $\overline{S_1} \| \overline{S_2}$, що і треба було довести.

Завдання до самостійної роботи

1. Знайти кут між прямими $x = 3t - 2$, $y = 0$, $z = -t + 3$ та $x = 2t - 1$, $y = 0$, $z = t - 3$.

Відповідь. $45°$.

2. Знайти тупий кут між прямими $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$ та $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{\sqrt{2}}$.

Відповідь. $120°$.

3. Довести паралельність прямих $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ та $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

4. Довести перпендикулярність прямих:

а) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ та $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0; \end{cases}$

в) $x = 2t + 1$, $y = 3t - 2$, $z = -6t + 1$ та $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$

3. ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

3.1. Умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини

Розгдянемо пряму L та площину Q:

$$L : \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}, \qquad Q : Ax + By + Cz + D = 0$$

Очевидно, що пряма L та площина Q:

1) перпендикулярні одна до одної тоді і тільки тоді, коли напрямний вектор $\overline{S}(m, n, p)$ прямої L та нормальний вектор $\overline{N}(A, B, C)$ площини Q колінеарні;

2) паралельні, якщо вектор $\overline{S}(m, n, p)$ перпендикулярний вектору $\overline{N}(A, B, C)$.

Приклад 1. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2,–3,4)$ паралельно прямим $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{8}$ та $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+5}{2}$.

Розв'язання. Дані прямі не паралельні, оскільки їх напрямні вектори $\overline{S_1}(1, 2, 8)$, $\overline{S_2}(4, 0, 2)$ не колінеарни. Запишемо рівняння площини, що проходить через дану точку $M(2,–3,4)$ з нормальним вектором $\overline{N}(A, B, C)$:

$$A(x – 2) + B(y + 3) + C(z – 4) = 0.$$

За нормальний вектор $\overline{N}(A, B, C)$ можна прийняти вектор, який перпендикулярен напрямним векторам $\overline{S_1}(1, 2, 8)$, $\overline{S_2}(4, 0, 2)$ даних прямих. Тому за вектор $\overline{N}(A, B, C)$ можна взяти векторний добуток векторів $\overline{S_1}(1, 2, 8)$ та $\overline{S_2}(4, 0, 2)$:

$$\overline{N}=\overline{S_1}\times\overline{S_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 8\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 8\\ 0 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & 8\\ 4 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=4\bar{i}+30\bar{j}-8\bar{k}.$$

Отже, $\overline{N}(4, 30, -8)$, тобто $A=4,\ B=30,\ C=-8$. Підставляючи знайдені значення, отримаємо $4(x – 2) + 30(y + 3) – 8(z – 4) = 0$ або $4x + 30y – 8z + 114 = 0$.

Відповідь. $4x + 30y – 8z + 114 = 0$.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2,–3,–5)$ перпендикулярно до площини $6x – 3y – 5z + 2 = 0$.

Розв'язання. Якщо пряма перпендикулярна до площини, тоді напрямний вектор прямої колінеарен нормальному вектору площини, тобто за напрямний вектор прямої візьмемо нормальний вектор площини $\overline{N}(6,–3,–5)$. Маємо канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2,–3,–5)$ перпендикулярно до площини $6x – 3y – 5z + 2 = 0$: $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$.

Відповідь. $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$.

Приклад 3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1,2 ,–1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

Розв'язання. Якщо площина перпендикулярна до прямої, тоді напрямний вектор прямої колінеарен нормальному вектору площини, тобто за нормальний вектор площини візьмемо напрямний вектор прямої $\overline{S}(1,–3,4)$. Маємо загальне рівняння площини $1(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0$. Після преобразувань $x-3y+4z-1+6+4=0,\quad x-3y+4z+9=0.$

Відповідь. $x-3y+4z+9=0.$

Приклад 4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$ паралельно прямій $\dfrac{x+5}{4}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-1}{2}$.

Розв'язання. Якщо площина проходить через пряму $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$, то точка $A(3,-4,2)$ знаходиться на шуканії площини. За нормальний вектор шуканої площини візьмемо вектор $\overline{N}=\overline{S_1}\times\overline{S_2}$, де $\overline{S_1}, \overline{S_2}-$ напрямні вектори прямих $\overline{S_1}(2,1,-3), \overline{S_2}(4,7,2)$:

$$\overline{N}=\overline{S_1}\times\overline{S_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & 7 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ 7 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 7\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}(2+21)-\bar{j}(4+12)+\bar{k}(14-4)=23\bar{i}-16\bar{j}+10\bar{k}.$$

Шукана площина має вигляд:

$23(x-3)-16(y+4)+10(z-2)=0,\quad 23x-16y+10z-69-64-20=0,$

$23x-16y+10z-153=0.$

Відповідь. $23x-16y+10z-153=0.$

Приклад 5. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$ та $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Розв'язання. Якщо площина проходить через пряму $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$, то точка $A(1,-2,0)$ знаходиться на шуканій площини. Якщо площина проходить через пряму $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$, то точка $B(-1,2,-1)$ знаходиться на шуканій площині. За нормальний вектор шуканої площини візьмемо $\overline{N}=\overline{S}\times\overline{AB}$, де $\overline{S}(3,2,-1)-$напрямний вектор прямої $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$, $\overline{AB}(-2,4,-1)$.

$$\overline{N}=\overline{S}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 2 & -1\\ -2 & 4 & -1\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & -1\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}(-2+4)-\bar{j}(-3-2)+\bar{k}(12+4)=2\bar{i}+5\bar{j}+16\bar{k}.$$

Отримали шукане рівняння площини $2(x-1)+5(y+2)+16(z-0)=0$, $2x+5y+16z-2+10=0$, $2x+5y+16z+8=0$.

Відповідь. $2x+5y+16z+8=0$.

Завдання до самостійної роботи

1. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1,-3,5)$ перпендикулярно до площини $x+6y-5z-17=0$.

Відповідь: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-5}{-5}$.

2. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3,-6,7)$ перпендикулярно до площини $x+4y-8z-4=0$.

Відповідь. $x=3+t$, $y=-6+4t$, $z=7-8t$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1,-2,1)$ перпендикулярно до прямої $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

Відповідь. $x+2y+3z=0$.

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(2,-2,1)$ і пряму $x=1+2t$, $y=2-3t$, $z=-3+2t$.

Відповідь. $4x+6y+5z-1=0$.

5. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$ паралельно прямій $x=2-t$, $y=1+3t$, $z=-2+4t$.

Відповідь. $15x-7y+9z-3=0$.

6. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$ перпендикулярно до заданої площини $3x+4y-z-1=0$.

Відповідь. $8x-y+20z-8=0$.

7. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ та $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{2}$.

Відповідь. $-2x+y+8z+4=0$.

3.2. Точка перетину прямої та площини

Треба знайти точку перетину прямої

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \tag{14}$$

та площини

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{15}$$

Для цього треба сумісно розв'язати систему рівнянь (14) та (15). Найпростіше це зробити за допомогою параметричних рівнянь прямої:

$$\begin{cases} x = mt + x_1, \\ y = nt + y_1, \\ z = pt + z_1. \end{cases} \tag{16}$$

Кожному значенню параметра t відповідає точка на прямій. Треба вибрати таке значення t, при якому точка, яка належить прямій, буде знаходитися на площині (15). Підставляючи $x,\ y$ та z із співвідношень (16) у рівняння площини (15), одержимо вираз, з якого знайдемо значення параметра t:

$$A(x_1 + mt) + B(y_1 + nt) + C(z_1 + pt) = 0 \text{ або}$$

$$t(Am + Bn + Cp) = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1). \tag{17}$$

Якщо пряма та площина не паралельні, то нормальний вектор $\overline{N} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$ площини та напрямний вектор $\overline{S} = m\overline{i} + n\overline{j} + p\overline{k}$ прямої не перпендикулярні між собою, і їх скалярний добуток не дорівнює нулю, тобто

$$\overline{N} \cdot \overline{S} = Am + Bn + Cp \neq 0.$$

І тоді з рівності (17)

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Am + Bn + Cp}. \tag{18}$$

Приклад 1. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ та площини $2x + 3y - 2z + 2 = 0$.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння даної прямої $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 1, \\ z = 2t + 5. \end{cases}$

Підставимо x, y, z в рівняння площини $2(2t+1) + 3(3t-1) - 2(2t+5) + 2 = 0$. Звідси $t = 1$. Підставляючи в параметричні рівняння прямой значення $t = 1$, отримуємо: $x=3$, $y=2$, $z=7$. Отже, пряма перетинає площину в точці $M(3, 2, 7)$.

Відповідь. $M(3, 2, 7)$.

Приклад 2. При яких значеннях A та D пряма $\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = 1\ \ 4t, \\ z = 3 + t \end{cases}$ належить площині $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

Розв'язання. Якщо пряма належить площині, то її напрямний вектор перпендикулярен нормальному вектору. З'ясуємо координати напрямного вектора прямої. Для цього запишемо канонічні рівняння прямої $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$. Тоді $\overline{S}(4,-4,1)$. Координати нормального вектора прямої $\overline{N}(A,2,-4)$. $\overline{S}\cdot\overline{N}=0$, оскільки $\overline{S}\perp\overline{N} \Rightarrow 4A-4\cdot2-4\cdot1=0 \Rightarrow 4A=12 \Rightarrow A=3$. Маємо рівняння площини $3x+2y-4z+D=0$. Точка $M(3,1,-3)$ належить і площині. Звідки $3\cdot3+2\cdot1+4\cdot3+D=0 \Rightarrow 9+2+12+D=0 \Rightarrow D=-23$. Тоді $A=3$, $D=-23$, і дана пряма належить площині.

Відповідь. $A=3$, $D=-23$.

Завдання до самостійної роботи

1. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$ та площини $2x+3y+z-1=0$.

Відповідь. (2, – 3, 6).

2. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{-5}$ і площини $x-2y+z-15=0$.

Відповідь. Пряма паралельна площині.

3. Перевірити, чи належить пряма $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}$ площині $4x+3y-z+3=0$.

Відповідь. Так.

4. Перевірити, чи належить пряма $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z-2}{3}$ площині $5x-8y-2z-1=0$.

Відповідь. Ні.

3.3. Пучок площин

Сукупність усіх площин, що проходять через задану пряму L, називається **пучком площин**, а пряма L - **віссю пучка**.

Нехай вісь пучка задана рівняннями:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{19}$$

Помножимо почленно друге рівняння системи (19) на сталу λ та складемо з першим рівннянням

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \tag{20}$$

Рівняння (20) має першу ступінь відносно x, y та z, отже при будь-якому числовому значенні λ визначає деяку площину. Так як рівність (20) є висновком рівнянь (19), то координати точки, що задовольняють рівнянням (19), будуть також задовольняти і рівнянню (20). Отже, при будь-якому числовому значенні λ рівняння (20) є рівнянням площини, що проходить через пряму (19). Рівняння (20) при змінних значеннях λ задає рівняння будь-якої площини пучка, вісь якого задана виразом (19), крім площини $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

Тому рівність (20) є рівнянням пучка площин. Рівняння пучка площин використовується при розв'язанні задач, в яких треба знайти площину, що проходить через задану пряму, а значення множника λ, як правило, знаходять з якої-небудь допоміжної умови, яка визначає знаходження шуканої площини.

Приклад 1. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1,–2,3)$ та пряму $\begin{cases} 2x+3y-5z+1=0, \\ 3x-2y+z+28=0. \end{cases}$

Розв'язання. Запишемо рівняння пучка площин, що проходять через дану пряму $2x+3y-5z+1+\lambda(3x-2y+z+28)=0.$

Підставимо у це рівняння координати точки M:

$2\cdot1+3\cdot(-2)-5\cdot3+1+\lambda(3\cdot1-2\cdot(-2)+3+28)=0$ і отримаємо $\lambda=\frac{1}{2}$, яке підставимо у рівняння пучка та одержимо шукану площину $2x+3y-5z+1+\frac{1}{2}(3x-2y+z+28)=0$ або $7x+4y-9z+30=0.$

Відповідь. $7x+4y-9z+30=0.$

Приклад 2. Знайти рівняння площини, що проходить через пряму

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ перпендикулярно до площини $3x + 3y - z + 1 = 0.$

Розв'язання. Представимо дану пряму як перетин площин, що її проектують, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}$ та $\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ або $3x - 2y - 5 = 0$ та $y - 3z + 1 = 0.$

Складемо рівняння пучка площин $3x - 2y - 5 + \lambda(y - 3z + 1) = 0$ (*)

або $3x + (\lambda - 2)y - 3\lambda z - 5 + \lambda = 0,$ (**)

Оскільки площина (1a) та дана площина перпендикулярні, то скалярний добуток їх нормальних векторів $\overline{N_1}=3\bar{i}+(\lambda-2)\bar{j}+3\lambda\bar{k}$ та $\overline{N_2}=3\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$ дорівнює нулю $3\cdot3+3\cdot(\lambda-2)+(-1)\cdot(-3\lambda)=0.$ Розв'яжемо це рівняння і знайдемо $\lambda=-\frac{1}{2}$, яке підставимо у рівняння пучка (*) та запишемо $3x - 2y - 5 - 0{,}5(y - 3z + 1) = 0$ або $6x - 5y + 3z - 11 = 0.$

Відповідь. $6x - 5y + 3z - 11 = 0.$

Завдання до самостійної роботи

1. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M $(1,–2,3)$ та пряму $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ x-y+z+28=0 \end{cases}.$

Відповідь. $37x + 31y – 31z + 118 = 0.$

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases} x+11y-2z+1=0, \\ x-y+z+29=0 \end{cases}$ та точку M $(2,–4,3)$.

Відповідь. $85x + 371y – 29z + 1401 = 0.$

1. Знайти рівняння площини, що проходить через пряму $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$ перпендикулярно до площини $x + 3y – z + 1 = 0.$

Відповідь. $5x – 6y – 13z – 11 = 0.$

2. Знайти рівняння площини, що проходить через пряму $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{1}$ перпендикулярно до площини $x + y – 5z + 1 = 0.$

Відповідь. $28x – 8y + 4z + 20 = 0.$

3.4. Кут між площиною та прямою

Нехай дано площину Q ($Ax + By + Cz + D = 0$) з її нормальним вектором $\overline{N}(A, B, C)$ та пряму L $\left(\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}\right)$ з її напрямним вектором $\overline{S}(m, n, p)$ (рис. 11).

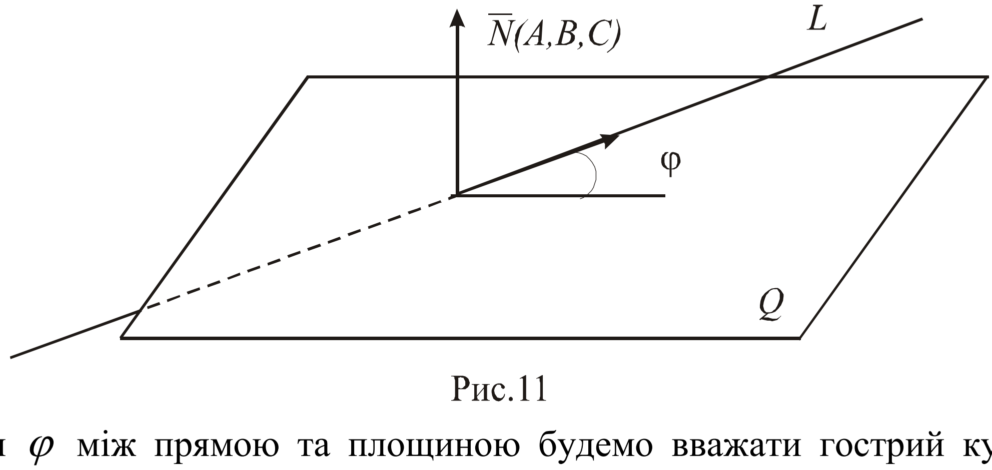

Рис.11

Кутом φ між прямою та площиною будемо вважати гострий кут між прямою та її проекцією на дану площину, тобто

$$\cos\angle(\overline{N},\overline{S})=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}};$$

$$\angle(\overline{N},\overline{S})+\varphi=\frac{\pi}{2};\ \cos\angle(\overline{N},\overline{S})=\sin\varphi.$$

Таким чином, $$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (21)$$

Приклад 1. Знайти кут між прямою $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-1}{3}$ та площиною $2x+y+z-5=0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (21), отримаємо

$$\sin\varphi=\frac{|2\cdot 2+1\cdot(-6)+1\cdot 3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\frac{4-6+3}{\sqrt{6}\sqrt{49}}=\frac{1}{7\sqrt{6}},\quad \varphi=\arcsin\frac{1}{7\sqrt{6}}.$$

Відповідь. $\varphi=\arcsin\frac{1}{7\sqrt{6}}$.

Приклад 2. Знайти кут між прямою $\begin{cases}x=t+9,\\ y=-2t+5,\\ z=-t-1\end{cases}$ та площиною $4x-2y+2z+7=0$.

Розв'язання. Перейдемо від параметричних рівнянь до канонічних $\frac{x-9}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+1}{-1}$. Тоді згідно з формулою (21) отримаємо

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+2\cdot(-1)|}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{4+4-2}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}=\frac{1}{2}.$$

Отже, $\varphi=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

Відповідь. $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

Приклад 3. Знайти кут між прямою $\begin{cases}y=3x-1,\\ 2z=-3x+2,\end{cases}$ та площиною $2x+y+z-4=0$.

Розв'язання. Перейдемо від загального рівняння прямої до канонічного. Запишемо загальне рівняння прямої як $\begin{cases}-3x+y+1=0,\\ 3x+2z-2=0.\end{cases}$ У ролі напрямного вектора прямої візьмемо $\overline{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}$, де $\overline{N_1}=(-3,1,0)$, $\overline{N_2}=(3,0,2)$.

Тоді

$$\bar{s}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -3 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}2-\bar{j}(-6)+\bar{k}(-3)=$$

$=2\bar{i}+6\bar{j}-3\bar{k}$. Маємо $\bar{S}=(2{,}6{,}-3)$. Знайдемо точку, яка належить прямій $\begin{cases}-3x+y+1=0,\\ 3x+2z-2=0.\end{cases}$ Нехай $y = 0$, тоді $3x + 1 = 0$, $x = 1/3$. Якщо $x = 1/3$, маємо $1 + 2z – 2 = 0$ або $2z = 2 – 1$, $z = 1/2$. Точка, яка належить прямій має координати $(1/3,\ 0,\ 1/2)$. Канонічні рівняння прямої запишемо як $\dfrac{x-\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-3}$. Згідно з формулою (21)

$$\sin\varphi=\frac{|2\cdot 2+1\cdot 6+1\cdot(-3)|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{2^2+6^2+(-3)^2}}=\frac{4+6-3}{\sqrt{6}\sqrt{49}}=\frac{7}{7\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\ \varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Відповідь. $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Завдання до самостійної роботи

1. Знайти кут між прямою $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-8}{3}$ та площиною $2x+4y-6z+7=0$.

Відповідь. 0°, тобто пряма паралельна площині.

2. Знайти кут між прямою $\begin{cases}x=4-t,\\ y=5-2t,\\ z=3t,\end{cases}$ та площиною $2x+4y-6z+7=0$.

Відповідь. 90°, тобто пряма перпендикулярна площини.

3. При яких значеннях B і p пряма $\begin{cases}x=5-3t,\\ y=9+4t,\\ z=-2+pt\end{cases}$ перпендикулярна до площини $6x + By – 10z + 9 = 0$?

Відповідь. $B = – 8$, $p = 5$

(Використовуйте умову колінеарності напрямного вектора прямої та нормального вектора площини).

Завдання до самостійної роботи

Варіант 1

1. Знайти відстань від точки $M_0(2, -1, 4)$ до площини, що проходить через точки $M_1(1, 2, 0,), M_2(1, -1, 2), M_3(0, 1, -1)$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{38}}{38}$.

2. Написати рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_2M_3}$, якщо $M_1(1, 0, -2)$, $M_2(2, -1, 3)$, $M_3(0, -3, 2)$.

Відповідь. $2x+2y+z=0$.

3. Знайти кут, який утворюють площини $2x+2y+z-1=0$ та $x+z-1=0$.

Відповідь. 45°.

4. Знайти координати точки $M_1(0, 0, z)$, однаково ввіддаленої від точок $M_2(5, 1, 0)$, $M_3(0, 2, 3)$.

Відповідь. $\left(0, 0, -\frac{13}{6}\right)$.

5. Написати канонічні рівняння прямої $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$

Відповідь. $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{1}$.

Варіант 2

1. На осі Оу знайти точку, яка знаходиться від площини $x+2y-2z-2=0$ на відстані d = 4.

Відповідь. (0, 7, 0) та (0, –5, 0).

2. Дано дві точкі $M_1(3, -1, 2)$ та $M_2(4, -2, -1)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Відповідь. $x-y-3z+2=0$.

3. Показати, що пряма $\begin{cases} x=3t-2, \\ y=-4t+1, \\ z=4t-5 \end{cases}$ паралельна площині $4x-3y-6z-5=0$.

4. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ та площини $x-2y+3z+17=0.$

Відповідь. $\left(-\dfrac{15}{7}, \dfrac{25}{7}, -\dfrac{18}{7}\right).$

5. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими $\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ x+y=0 \end{cases}$ та $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z}{1}.$

Відповідь. $\dfrac{\sqrt{14}}{2}.$

Вказівка: найкоротшою відстанню між двома прямими буде відстань від будь-якої точки, яку взято на одній прямій, до площини, що проведена через другу пряму паралельно першій.

Варіант 3

1. Знайти відстань від точки $P(-1, 1, -2)$ до площини, що проходить через точки $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(-2, 1, 3)$, $M_3(4, -5, -2)$.

Відповідь. $d = 4$.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3, 4, -5)$ паралельно двом векторам $\overline{a_1}(3, 1, -1)$ та $\overline{a_2}(1, -2, 1)$.

Відповідь. $x+4y+7z+16=0.$

3. Довести перпендикулярність прямих $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ і $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0. \end{cases}$

4. Знайти проекцію прямої $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ на площину $x+y+z=0.$

Відповідь. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ y-z-1=0. \end{cases}$

Вказівка: проекцією L' прямої L $\left(\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}\right)$ на площину Q $(Ax+By+Cz+D=0)$ є пряма, що знаходиться в перетині площини Q та площини P, яка проходить через пряму L перпендикулярно до площини Q (рис. 12).

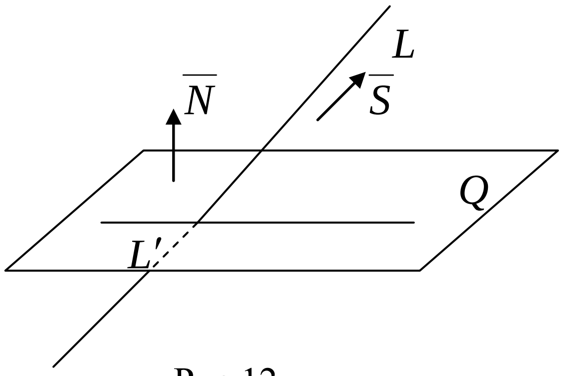

Рис.12

За нормальний вектор площини Р візьмемо вектор $N_1 = \overline{S} \times \overline{N},$ де $\overline{S}$ – напрямний вектор прямої L; $\overline{N}$ – нормальний вектор площини Q.

5. Знайти точку M', яка симетрична точці M (1, 1, 1) відносно прямої $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1{,}5}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Відповідь. (1, 0, –1)

Вказівка: через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ треба провести площину Q перпендикулярно до прямої L ($\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$). Ця площина матиме рівняння $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$ За нормальний вектор $\overline{N}(A,B,C)$ цієї площини можна прийняти напрямний вектор $\overline{S}(m,n,p)$ прямої L. Отже, рівняння площини Q буде $m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0.$

Далі знайдемо точку O перетину площини Q з прямою L. Точка O є серединою відрізка MM'.

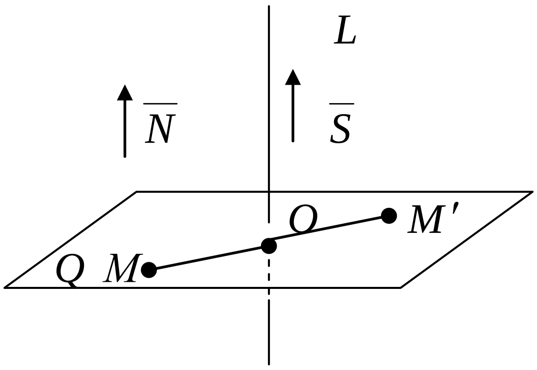

Рис.13

Варіант 4

1. На осі Oz знайти точку, яка однаково віддалена від точки M (1,–2,0) і площини $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

Відповідь. (0,0,–2), $\left(0,\ 0,\ -6\frac{4}{13}\right)$.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2, -1, 3)$ і $M_2(3, 1, 2)$ паралельно вектору $\bar{a}$ $(3, -1, 4)$.

Відповідь. $x - y - z = 0$.

3. Знайти тупий кут між прямими $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = 0, \\ z = -t + 3 \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 0, \\ z = t - 3. \end{cases}$

Відповідь. 135°.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M $(1,2,-1)$ та пряму $\dfrac{x-5}{-1} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z-1}{2}$.

Відповідь. $4x + 2y - 3z - 11 = 0$.

5. Знайти точку M', яка симетрична точці M $(2,-1,1)$ відносно площини $x - y + 2z - 2 = 0$.

Відповідь. $(1, 0, -1)$.

Вказівка: через точку M треба провести пряму перпендикулярно до даної площини Q (рис.14).

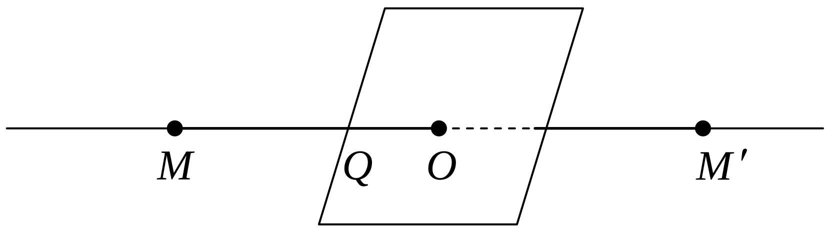

Рис.14

За напрямний вектор прямої MM' можна прийняти нормальний вектор площини Q.

Варіант 5

1. На осі Ox знайти точку, яка знаходиться на однаковій відстані від площин $12x - 16y + 15z + 1 = 0$ та $2x + 2y - z - 1 = 0$.

Відповідь. $(2, 0, 0)$, $\left(\dfrac{11}{43}, 0, 0\right)$.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -1, -1)$, $M_3(2, 0, 2)$.

Відповідь. $3x + 3y + z - 8 = 0$.

3. Знайти гострий кут між прямими: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ та $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

Відповідь. 60°.

4. Знайти рівняння площини, яка пройде через пряму $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+6}{-2}$ паралельно прямій $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-1}$.

Відповідь. $x + 3y + 5z + 24 = 0$.

5. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$ та $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$.

Відповідь. 13.

Вказівка: найкоротшою відстанню між двома прямими буде відстань від будь-якої точки, яка взята на одній прямій до площини, що проведена через другу пряму паралельно першій.